Возможно где-то есть ошибки. Внесены изменения в соответствии с консультацией. Об ошибках пожалуйста говорите

MC'2011.

Параграфы:

Глава.Сравнение рисковых ситуаций и простейшие методы расчета страховых тарифов

1.Сравнение рисковых ситуаций страховых компаний. Функция полезности.

2.Общие принципы выбора страховых премий (тариф)

3.Принципы расчета тарифных ставок

4.Математические модели страхового риска. модели и задачи теории риска

Глава 1. Модель индивидуального риска (статическая модель)

5.Понятие модели индивидуального риска

6.Вероятность разорения в модели индивидуального риска. классическая, ассимптотическая формула для страховых премий в статической модели страхования.

7.Факторизационная модель индивидуальных исков и постановка задач, относящихся к статической модели страхования.

8.Постановка задачи опеределения оптимальной страховой ставки

9.Основные предположения и обозначения в рамках F-модели.

10.Простейшая формула для страховой ставки, учитывающая 2 момента распределения риска в условиях факторизационной модели.

11.Ассимптотические оценки, основанные на нормальной апроксимации распределения итогового страхового фонда

12.Частные случаи распределения объема страхового портфеля

Глава2. Модели Коллективного риска (динамические модели)

13.Процессы риска Спарре Андерсона. Классический процесс риска.

14.Типы потоков страховых требований.

15.Информационные свойства пуассоновского процесса.

16.Смешанные пуассоновские процессы.

17.Определение и простые свойства дваждыстохастических прцоессов.

18.Ассимптотические свойства дваждыстохастических пуассоновских процессов.

19.Распределение суммарных страховых выплат.

Глава. Вероятность разорения.

20.Формула Поллаче-Хичина-Блекмана для вероятности в классическом процессе риска.

21.Приближенная формула вероятности разорения при малой нагрузке безопасности.

Вопросы по теории вероятностей

1. Случайная величина
   $X : \Omega \to \Re; \forall B \in B(\Re)$ – борелевская : $X^{-1}(B) \in F, X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$.

2. Независимые случайные величины

   $$X_1, X_2, X_3 \forall A_1, A_2, A_3 \in B(\Re) - \text{борелевская} : P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, X_3 \in A_3) =$$
   $$= P(X_1 \in A_1) * P(X_2 \in A_2) * P(X_3 \in A_3).$$

   Независимые в совокупности

   $$P(X_i \in A_i, X_j \in A_j) = P(X_i \in A_i) * P(X_j \in A_j); i \neq j; \forall i, j = 1, 2, 3...$$

3. Одинаково распределенные случайные величины

   $$P(\xi < x) = F_\xi(x) - \text{функция распределения случайной величины}$$

   $$\xi, \eta - \text{одинаково распределены} \Leftrightarrow F_\xi(x) = F_\eta(x), \forall x \in \Re.$$

4. Функция распределения. Основные свойства ф.р.

   $$P(\xi < x) = F_\xi(x) - \text{функция распределения случайной величины}$$

   1.неубывает

   $$2. lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

   $$3. lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

   4.непрерывна слева

5. Математическое ожидание(в общем, дискретном и абс. непр. случаях)

   $$(\Omega, F, \nu)\ E\xi = \int_\Omega \xi(x) d\nu(x) = \int_\Re x dF(x) \text{ - сходится}$$

   $$E\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i p(\xi = x_i) \text{ - абсолютно сходится}$$

   $$E\xi = \int_{R_k} x f(x) dx, \text{ где f(x)- плотность - сходится}$$

6. Квантиль распределения. Медиана

   Квантилью порядка $\alpha \in (0,1)$ распределения $F(x)$ называется такое число u_α, что: $\begin{cases} \mathrm{F}(\mathrm{u}_\alpha - 0) \le \alpha, \\ \mathrm{F}(\mathrm{u}_\alpha + 0) \ge \alpha. \end{cases}$

Медианой называется квантиль порядка $\alpha = 1/2$

7. Отношение Ляпунова
   Если существуют моменты и $E\xi^2 \neq 0$, то $L^3 = \frac{E|\xi|^3}{(E\xi^2)^{3/2}}$

8. Классическая дробь Ляпунова
   Если существуют моменты и $D\xi \neq 0$, то $L_0^3 = \frac{E|\xi - E\xi|^3}{(D\xi)^{3/2}}$

9. Вероятность
   Вероятность - неотрицательная мера, такая что:

   $(\omega, F); P: F \to [0,1]$
   1. $P(\omega) = 1$
   2. $P(A) \ge 0, \forall A \in F$
   3. $\forall A_1, .., A_n, .. \in F\ A_i \bigcap A_j = \oslash, i \neq j;\ P(\bigcup_1 A_i) = \sum_1 P(A_i)$

10. Распределение Пуассона(плотность, характеристическая функция)

    $\xi \approx pois(\lambda), \lambda > 0$
    Плотность не существует. $\phi(x) = Ee^{it\xi} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

11. Нормальное распределение(плотность, хар. Функция)

$$\xi \approx N(a, \sigma^2),\ \sigma > 0, a \in \Re, x \in \Re, t \in \Re$$

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$\phi(x) = Ee^{it\xi} = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

12. Экспоненциальное распределение(плотность, хар. Функция)

    f(x)=$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x},\ x \ge 0, \lambda > 0 \\ 0,\ \mathrm{x}<0 \end{cases}$; $\phi(x) = Ee^{it\xi} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

13. Классическое неравенство Берри-Эссеена

    $\xi_1, ..\xi_n$ - н.о.р.с.в. $0 \neq D\xi_i = \sigma^2 < \infty$
    $S_n = \xi_1 + .. + \xi_n$, Существует третий момент
    $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}};\ F_{T_n} = P(T_n < x)$

    $$sup_x|F_{T_n} - \Phi(x)| \leq \frac{CL_0^3}{\sqrt{n}}$$

14. Характеристическая функция (в общем, дискретном, абс. Непр. случае)

    $\phi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\Re} e^{itx} dF_\xi(x)$ - комплекснозначная функ. действ. переменного
    $\phi_\xi(t) = \int_{\Re} e^{itx} p_\xi(x)dx$ - абс. непр.
    $\phi_\xi(t) = \sum_j e^{itx_j} p_j(\xi = x_j)$ - дискр

15. Случайный процесс(две сущности)

    1.**Случайный процесс** - это параметризованное семейство сл.в., определенных на одном вероятностном пространстве.
    2.Пусть задано измеримое пространство (Ω, F) и измеримое пространство (S, Σ) действительных функций (зависящих от t), тогда $X : \Omega \to S$ случайным образом, называется **случайным процессом**

16. Борелевская сигма-алгебра

    Борелевская сигма-алгебра - сигма-алгебра, порожденная (минимальная, содержащая все) множеством всех открытых интервалов.

17. Безгранично делимое распределение(два опр.)

    $$1.\xi - \text{безгранично делима, если } \forall n \in \aleph:\ \xi =^d \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ \xi_i - \text{н.о.р.с.в.}$$

    $$2.\xi - \text{безгранично делимая случайная величина} \Leftrightarrow \forall m \in \aleph:\ \phi(t) = \phi_m^m(t)$$

    $$\phi_m \text{ - некоторая х.ф.}$$

18. Неравенство Йенсена

    $g = g(x), x \in \Re$ - борелевская, выпуклая вниз (вверх)
    ξ - сл.в. $E|\xi| < \infty$

    $$g(E\xi) \leq Eg(\xi);\ (g(E\xi) \geq Eg(\xi))$$

19. Плотность
    Плотность $f(x)$ - такая неотрицательная функция, что $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, где $F(x)$ - функция распределения.

20. n-кратная свертка

    H^{*n}-n-кратная свертка распределения ф.р. $H(x)$ с собой:

    - $H^{*n} = \int_{-\infty}^{\infty} H^{*n-1}(x-y)dH(y)$
    - $H^{*1}(x) \equiv H(x)$
    - $H^{*0}(x) \approx \xi =^{\text{п.н.}} 0$

II. Вопросы по статическим моделям

1. Распределение риска

   Пусть S-начальный резерв,
   X_i- индивидуальные иски i-го клиента,
   $F_i(x)$ - функция распределения X_i, $F(0) = 0$
   $X = X_1 + .. + X_n$-общие страховые выплаты,
   $F(x) = P(X < x)$- распределение суммарного иска -
   распределение риска.

2. Принцип эквивалентности

   Пусть $EX = \mu < \infty$; $\mu_n = \frac{\mu}{n}$ - чистая цена (рисковая премия).
   Действие принципа эквивалентности: Если цена полисов μ_n, то в среднем не получается ни прибыли, ни убыли.

3. Нагрузка(рисковая надбавка)
   Рисковая надбавка - величина, на которую страховая премия отличается от чистой цены (ν_i)

4. Общий вид конечного капитала страховщика.
   S-начальный резерв, ν_i - рисковая надбавка,
   $\mu = EX < \infty; \mu_n = \frac{\mu}{n}$ - чистая цена(рисковая премия)

$$S + \sum_{i=1}^{n} \nu_i + \mu \equiv R + \mu, \text{где R - свободный резерв}$$

5. Функция полезности
   Функцией полезности называется действительная функция действительного переменного, агрумент которой - капитал, а значение имеет смысл удовлетворения капиталом.

6. Ожидаемая полезность
   Ожидаемая полезность $(U(Y))$: $U(Y) = Eu(Y) < \infty$, где Y - ожидаемый капитал (случайная величина)

7. Отвращение к риску. Склонность к риску.

   1.$EX < d*$,где X - индивидуальный риск, $d*$ - величина индивидуальной премии; $u(y) \bigcap \Rightarrow$ отвращение к риску
   2.$EX > d*$,где X - индивидуальный риск, $d*$ - величина индивидуальной премии; $u(y) \bigcup \Rightarrow$ склонность к риску

8. Принцип умеренности. Принцип достаточности.

   Для тарифов выполнен **принцип достаточности**, если:
   $$\begin{cases} \text{z} \geq EX_i,\ z \text{ - ставка-премия, где } X_i \text{ -относительный иск} \\ \text{P(r+Z-Y} \geq 0) \geq Q > \frac{1}{2} \to 1, \text{ r-нач. капитал, Z-сумм. премия, Y - сумм. выплаты} \end{cases};$$

Для тарифов выполнен **принцип умеренности**, если: $z_0 = min_{z \in [0,1]} z$

9. Модель индивидуального риска

   Модель индивидуального риска или статическая модель страхования описывает ситуацию, в которой рассматривается совокупность объектов страхования (страховой портфель), сформированные единовременно, страховые премии, собранные в момент страхования, срок действия всех договоров страхования одинаков и в течениие этого срока происходят страховые события, приводяшие к страховым выплатам (искам).

10. Модель коллективного риска.

    Модель коллективного риска (динамическая модель страхования) предполагает, что договора страхования заключаются страховщиком в моменты времени, образующие сл. процесс, каждый из договоров имеет свою собственную длительность и в течении действия этого договора могут происходить страховые события, приводящие к убыткам страховой компании (страховщика). Такая модель может рассматриваться как на конечном так и на бесконечном интервале времени.

11. Вероятность разорения.

    Вероятность того, что остаточный капитал <0

12. Факторизационная модель. Страховая сумма. Относительный иск.

    Страховая сумма(S_j) - максимально возможная величина индивидуального иска по данному договору страхователя.
    $\forall \omega : z(\omega) = \{$премия - сл.в.$\} \equiv zS$
    $Y_j = \{$**величина иска**$\} =^d X_j S_j$ $(X_j, S_j$ - независимые сл.в.)
    $X_j = \frac{Y_j}{S_j}$ - **относительный иск** - сумма выплачиваемая по договору на 1 иск

13. Ставка премии (страховая ставка).

    Ставка-премия - процентная доля страховой суммы. составляющая страховую премию.

14. Оптимальная ставка премии

    Ставка, обладающая свойством достаточности и умеренности, называется **оптимальной** (минимально допустимой).
    Для тарифов выполнен **принцип достаточности**, если:
    $\begin{cases} \text{z} \geq EX_i,\ z \text{ - ставка-премия, где } X_i \text{ -относительный иск} \\ \text{P(r+Z-Y}\geq 0) \geq Q > \frac{1}{2} \to 1, \text{ r-нач. капитал, Z-сумм. премия, Y - сумм. выплаты} \end{cases};$

Для тарифов выполнен **принцип умеренности**, если: $z_0 = min_{z\in[0,1]} z$

III Вопросы по динамическим моделям

1. Процесс риска.

   $\zeta_1, \zeta_2, ..$ - страховые взносы,
   X_i - размеры страховых выплат (н.о.р.с.в.), $\approx F(x), F(0) = 0$
   Пусть T_i - моменты наступления страховых выплат, причем
   $0 < T_1 < T_2 < ..$
   $N^+(t)$ - заключенное количество контрактов - сл.в.,
   $N^-(t) = max\{n|T_n \leq t\}$ - количество страховых случаев к моменту t - сл.в,
   $R^+(t) = \sum_{i=1}^{N^+(t)} \zeta_i$
   $R^-(t) = \sum_{i=1}^{N^-(t)} X_i$
   $R_d(t) = R^+(t) - R^-(t), t \geq 0$ - динамическая составляющая,
   u - начальный капитал, $t > 0$
   Если $u \geq 0$, то $R(t) = u + R_d(t) = u + \sum_{i=1}^{N^+(t)} \zeta_i - \sum_{i=1}^{N^+(t)} X_i, t \geq 0$ - **процесс риска.**

2. Вероятность разорения.

   Пусть R - процесс риска, u - начальный капитал, тогда:
   $\psi(u) = P(\tau < \infty | R(0) = u)$-вероятность разорения на бесконечном интервале времени, где $\tau = inf\{t|R(t) < 0\}$
   $\psi(u) = P(\tau < T | R(0) = u)$-вероятность разорения на $[0, T]$, где
   $\tau = inf\{t|R(t) < 0\}$.

3. Процесс восстановления. Пусть $\theta_1, \theta_2, ..$ - н.о.р.с.в., неотрицательные. **Процессом восстановления** $X(t)$ - называется процесс отпределяемый, как: $X(t) = max_n(\theta_1 + ... + \theta_n < t)$

4. Процесс риска Спарре Андерсена.
   Процессом риска Спарре Андерсона называется процесс $R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t > 0$, где $u > 0$ - начальный капитал, $c > 0$ - средний прирост капитала в единицу времени, $N, X_1, X_2, ..$ - независимые сл.в. $\forall t, t > 0$.

5. Нагрузка безопасности
   Нагрузкой безопасности называется $\rho = \frac{c\alpha - \mu}{\mu}$, где $E\theta_1 = \alpha < \infty, EX_1 = \mu < \infty; \theta_i = t_i - t_{i-1}$

6. Классический процесс риска
   Классическим процессом риска называется процесс $R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t > 0$, где $u > 0$ - начальный капитал, $c > 0$ - средний прирост капитала в единицу времени, $N, X_1, X_2, ..$ - независимые сл.в. $\forall t$, а $X_1, X_2, ..$ - н.о.р.с.в. $\forall t, N(t)$ - пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\lambda, t > 0$

7. Пуассоновский процесс
   Случайный прцоесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$- называется пуассоновским, если:

   - $\xi(0) =^{\text{п.н.}} 0$
   - $\xi(t)$ - нез. приращ.: $\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), ..\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ - независимы
   - $\xi(t)$- однор. по времени: $\xi(t+h) - \xi(t) = \xi(s+h) - \xi(t), \forall s, t, h \geq 0$
   - $P(\xi(t) \in \aleph \cup 0) = 1$
   - $\lambda > 0 h \to 0 :$
     $P(\xi(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
     $P(\xi(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
     $P(\xi(h) > 1) = o(h)$

8. Теорема об асимптотической нормальности пуассоновского процесса.
   $\forall \lambda > 0, t > 0 : sup_x \left| P(\frac{N_\lambda(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x) - \Phi(x)) \right| \leq \frac{C_{\text{ш.т.}}}{\sqrt{\lambda t}}, N_\lambda$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ

9. Точечный процесс.

   Определим $\Xi = \{\mu(t), t \geq 0\}$:

   - $\mu(0) = 0$
   - $\mu(t) < \infty, \forall t \geq 0$
   - непрерывный слева, неубывающий
   - $\beta(\Xi)$ - борелевская сигмаалгебра на классе Ξ.

   Точечным процессом $N = \{N(t), t \geq 0\}$ - называется измеримое отображение $(\Omega, F) \to (\Xi, \beta(\Xi))$.

10. Ординарный процесс. Стационарный процесс.

    Точечный процесс называется **стационарным**, если сдвинутый процесс $N_p(t) = N(p+t) - N(t)$ имеет одно и то же распределение $\forall t \geq 0$
    Процесс N называется **ординарным**, если он считающий и почти все скачки данного процесса почти всюду имеют единичную величину.

11. Смешанный пуассоновский процесс. Два опр.

    1. точечный процесс N называется смешанным пуассоновским процессом со структурным распределение U и обозначается MPP(U), если:

    $$\Pi_N(B) = \int_0^\infty \Pi_\lambda(B) dU(\lambda), \forall B \in B(\Xi)$$

    $$P(\lambda \leq x, N \in B) = \int_0^x \Pi_\lambda(B) dU(\lambda)$$

    2.Точечный процесс N называется смешанным пуассоновским процессом, если $N = N_1 \circ \lambda$, т.е: $N(t) = (N_1 \Lambda)(t)$, где N_1 - стандартный пуассоновский процесс, Λ - неотрицательная случайная величина, независимая от N, а $\circ$ - суперпозиция.

12. Теорема о безграничной делимости смешанного пуассоновского процесса.
    Пусть $N \approx MPP(U)$. Процесс $N = (N_1 \Lambda)(t)$ - безгранично делим $\iff \Lambda$ - безгранично делима.

13. Случайная мера.
    Случайный процесс $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ с неубывающими траекториями, удовлетворяющими условию $\Lambda(0) = 0$ и $P(\Lambda(t) < \infty) = 1, \forall t \geq 0$ называется **случайной мерой.**

14. Дважды стохастический пуассоновский процесс (процесс Кокса)
    Пусть $N_1(t)$ - стандартный пуассоновский процесс,
    $\Lambda(t)$ - случайная мера, независимая от $N_1(t)$.
    случайны процесс $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ - называется **дваждыстохастическим пуассоновским процессом или процессом Кокса.**

15. ЗБЧ для проекции процессов Кокса.

    Пусть $d(t)) > 0, d(t) \to \infty$ при $t \to \infty, N = (N_1(\Lambda(t))$
    Тогда следующее эквивалентно:
    1. Нормированные проекции процесса Кокса слабо сходятся к некоторой сл.в., те: $\frac{N(t)}{d(t)} \Rightarrow Z,$ при $t \to \infty.$
    2.Одномерные распределения управляющего процесса, нормированные надлежащим образом, слабо сходятся к одному пределу, т.е:$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow Z,$ при $t \to \infty.$

16. Функция распределения для проекции процесса риска
    $P(R(t) < x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) F *^n (u + ct - x + 0),$ где F(x) - ф.р. X

17. Теорема переноса

    Пусть N_n - целочисленная случайная величина,
    $N_n, X_1, X_2, ..$ - независимые случайные величины $\forall n,$
    $S_n = X_1 + .. + X_n,$
    $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\} : b_n \to \infty, d_n \to \infty,$ при $n \to \infty,$
    $\exists Y, U, V$-сл.в.:$\frac{S_n - a_n}{b_n} \Rightarrow Y; \left(\frac{b_{N_n}}{d_n}; \frac{a_{N_n} - c_n}{d_n}\right) \Rightarrow (U, V)$, тогда:

    $$\frac{S_{N_n} - c_n}{d_n} \Rightarrow Z, \text{ где } Z =_d YU + V; Y, (U, V) - \text{независимы.}$$

18. Теорема об ассимпт. нормальности классического процесса риска.
    Пусть $N(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ, тогда:

    $$\forall x : lim_{n \to \infty} P\left(\frac{R_n - u - (c - \lambda\mu)n}{\sqrt{\lambda n(\mu^2 + \sigma^2)}} < x\right) = \Phi(x)$$

19. Фомула Поллачека-Хинчина-Блекмана Пусть $Y_1, Y_2, ..$ - независимые сл.в. имеющие плотность $h(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x)), x > 0, H(x)$ - соответствующяая ф.р. Пусть M - сл.в. независимая от $Y_1, Y_2, ..$, имеющая геометрическое распределение с параметром $\frac{1}{1+\rho}$, тогда:

    $$\Psi(u) = P(Y_1 + .. + Y_M > u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^{*k}(u)}{(1+\rho)^k}.$$

20. Общий вид оценки для вероятности разорения в классических моделях
    $\psi(u) = Ae^{-Bu}, A, B, u > 0,$ u- начальный капитал